מועד ב', סמסטר אביב תשפ"ב - אלגברה 1/מ, 104016
7.10.22

ת"ז :

פקולטה :

- משך המבחן : 3 שעות.
- השימוש בחומר עזר כלשהו ובמחשבונים אסור בהחלט.
- רשמו את כל תשובותיכם בדפים אלה. אפשר להשתמש בשני צידי הדף.
- **בשאלות 1-3** יש **לנמק** היטב כל תשובה. **תשובה לא מנומקת לא תחשב**.
  בשאלות 4-8 יש לסמן את התשובה הנכונה בטבלה שבעמוד זה. בכל שאלה יש רק סימון אחד נכון. אם תסומן יותר מתשובה אחת השאלה תיפסל.
- **אין לתת נימוקים בשאלות 4-8.**
- שאלת ש"ב (המהווה גם 5% מגן) היא 3-א'.

ב ה צ ל ח ה !

טבלה לסימון תשובות נכונות בשאלות 4-8

	שאלה 4	שאלה 5	שאלה 6	שאלה 7	שאלה 8
א.					
ב.					
ג.					
ד.					
ה.					

<u>שאלה מס' 1</u> : (24 נקודות)

יהי $T:\mathbb{R}^{2\times 2}\to \mathbb{R}_3[x]$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י :

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=(2a+2b-3d)+(a+b+c-2d)x+(-b+d)x^2+(-2c+d)x^3$$

א. (5 נק') מצאו בסיס ומימד לגרעין של T.

ב. (5 נק') מצאו בסיס ומימד לתמונה של T.

ג. (5 נק') הוכיחו כי כל מטריצה A ב- $Ker(T)$ היא לכסינה.

ד. (5 נק') יהי $W=\left\{p(x)\in\mathbb{R}_3[x] \mid p'(1)=p''(1)=0\right\}$. מצאו בסיס ומימד ל- $\mathrm{Im}(T)\cap W$.

ה. (4 נק') הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה :

לא קיימת העתקה לינארית $S:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}^3$ כך ש : $S\circ T$ חח"ע.

<u>שאלה מס' 2</u> : (20 נקודות)

תהי $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$ המטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\2&2&3\end{pmatrix}.$$

א. (5 נק') מצאו את הפולינום האופייני של A, את הערכים העצמיים ואת הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ערך עצמי.

ב. (10 נק') הוכיחו כי A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ ומצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש $P^{-1}AP=D$.

ג. (5 נק') יהי $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ האופרטור הלינארי המקיים: $[T]_B=A-I$ כאשר $B=\{1\,,\,1+x\,,\,1+x+x^2\}$. מצאו בסיס ל- $Ker(T)$.

בשאלה זו יש לתת פתרון מלא ובסוף לרכז את התשובות במשבצות המתאימות בסוף השאלה.

א. פולינום אופייני:	ב. A לכסינה כי:	ג. בסיס ל- $Ker(T)$:
ע״ע | ר״א | ר״ג	$D=$ $P=$	

<u>שאלה מס' 3</u> : (31 נקודות) **סעיף א' בשאלה זו מהווה שאלת ש"ב.**

בשאלה זו 4 סעיפים. הוכיחו את הטענות הבאות או הפריכו ע"י דוגמא נגדית מספרית:

א. (10 נק') תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. אם A לא הפיכה, אז קיימת מטריצה $B\neq 0$ כך ש $AB=0$.

ב. (7 נק') יהי V מרחב וקטורי מעל לשדה F, ויהי W תת מרחב של V. יהיו $v_1,v_2\in V$ כך ש- $v_1,v_2\notin W$. אם $\{v_1,v_2\}$ בלתי תלויה לינארית אז $span\{v_1,v_2\}\cap W=\{0\}$.

ג. (7 נק') יהי V מרחב וקטורי מעל לשדה F, ויהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי כך ש: $T^3=0$.

יהי $v\in V$ כך ש $T^2(v)\neq 0$, אז $\{v\ ,\ T(v)\ ,\ T^2(v)\}$ בלתי תלויה לינארית.

ד. (7 נק') אם A מטריצה ריבועית ממשית בעלת פולינום אופייני $f(\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$

אז $rank(A^k)=2$ לכל $k\in\mathbb{N}$.

<u>יש לסמן את התשובה הנכונה לשאלות 4-8 בטבלה שבדף הראשון. נימוקים לא יבדקו.</u>
<u>יותר מסימון אחד יגרור ניקוד 0 על השאלה.</u>

<u>שאלה מס' 4</u> : (5 נקודות)

תהי $A=\begin{pmatrix}1&0&z&w&0\\0&1&0&z&w\\3&0&z&0&0\\0&3&0&z&0\\0&0&3&0&z\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{5\times5}$ כאשר $w=\frac{1+i}{\sqrt{27}}$. יהיו $z_1,z_2,...,z_k$ כל הפתרונות של המשוואה: $\det(A)=0$. נסמן $t=\arg(z_1\cdot z_2\cdot...\cdot z_k)$ ($0^\circ\le\arg(z_j)<360^\circ$), אזי:

א. $t=0$; ב. $t=90^\circ$; ג. $t=120^\circ$; ד. $t=210^\circ$; ה. $t=270^\circ$.

<u>שאלה מס' 5</u> : (5 נקודות)

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, ויהיו $v_1,v_2,v_3\in V$. נסמן:

$\alpha\in\mathbb{R}$, $T=\{\alpha v_1+v_2+v_3\ ,\ v_1+\alpha v_2+v_3\ ,\ v_1+v_2+\alpha v_3\}$, $S=\{v_1,v_2,v_3\}$. אזי:

א. קיים α עבורו $\dim(span\{S\})<\dim(span\{T\})$.

ב. אם S בלתי תלויה ליניארית אז T בלתי תלויה ליניארית לכל α.

ג. אם S בלתי תלויה ליניארית אז קיימים בדיוק שני ערכים שונים של α עבורם T תלויה ליניארית.

ד. אם S בלתי תלויה ליניארית אז T בלתי תלויה ליניארית לכל $\alpha\neq1$.

ה. אם S תלויה ליניארית אז קיימים בדיוק שני ערכים שונים של α עבורם T תלויה ליניארית.

<u>שאלה מס' 6</u> : (5 נקודות)

נתונה המטריצה: $A=\begin{pmatrix}a&2&2\\2&a&2\\2&2&a\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$ אזי:

א. קיים בדיוק ערך אחד של a עבורו המטריצה A לכסינה.

ב. קיים בדיוק ערך אחד של a עבורו המטריצה A דומה למטריצה $\begin{pmatrix}0&7&0\\0&6&0\\0&5&0\end{pmatrix}$.

ג. לא קיים אף ערך של a עבורו המטריצה A שקולת שורות למטריצה $\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&3\\0&2&-5\end{pmatrix}$.

ד. קיים ערך של a עבורו למטריצה A יש ערך עצמי מריבוי אלגברי 3.

ה. קיים בדיוק ערך אחד של a עבורו $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A.

<u>שאלה מס' 7</u> : (5 נקודות)

יהי V מרחב וקטורי מעל לשדה $\mathbb{R}$, ויהי $B=\{v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3\ ,\ v_4\}$ בסיס סדור של V.

יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי כך ש:

$$[T]_B=\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&0&3&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

אזי:

א. $\operatorname{Im}T\cap KerT=\{0\}$.

ב. הקבוצה $\{v_3,v_4\}$ היא בסיס ל- $\operatorname{Im}T$.

ג. T לכסין.

ד. $\operatorname{Im}T=KerT$.

ה. $V=\operatorname{Im}T\oplus KerT$.

<u>שאלה מס' 8</u> : (5 נקודות)

תהי $A\in\mathbb{R}^{2\times2}$ המקיימת: $trace(A)=1\ ,\ \det(A)=-6$.

אזי $\det(2A^3-3A^2-17I)$ שווה ל:

א. 0 ; ב. -450 ; ג. 102 ; ד. -18 ; ה. 210.

דף ריק למקרה הצורך